全国甲卷理科第20题的解法分析与思考

张青松　作者单位：云南师范大学实验中学

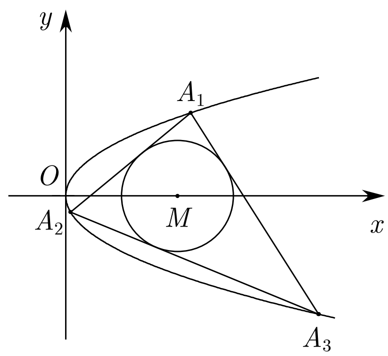
邮编：650031　联系电话：15987110511　通讯地址：云南省五华区建设路171号

2021年全国甲卷理科第20题是一道结构优美、结论简洁的试题，考查内容是过一点作圆锥曲线的两条切线．这类问题涉及双切线、双切点、双斜率，在设点、设直线方程以及求解过程中，处理方法技巧性强，对考生运算能力和方程思想灵活运用要求高，是圆锥曲线的一个难点和热点问题，类似考题经常出现在数学联赛、高考和各省市模拟考的试卷中．

下面笔者以这道高考题为例，进行详细解答和分析，并给出相关的高考试题，供大家参考．

一、题目再现

题目（2021年全国甲卷理科第20题）抛物线C的顶点为坐标原点O，焦点在x轴上，直线l：$x=1$交C于P，Q两点，且$OP\perp OQ$．已知点$M(2,0)$，且$\odot M$与l相切．



(1) 求C，$\odot M$的方程；

(2) 设A_1，A_2，A_3是C上的三个点，直线A_1A_2，A_1A_3均与$\odot M$相切．判断直线A_2A_3与$\odot M$的位置关系，并说明理由．

二、解法探析与反思

(1) 设抛物线方程$y^2=2px\ (p>0)$．

由直线$x=1$交C于P，Q两点，得$P(1,\sqrt{2p})$，$Q(1,-\sqrt{2p})$，$\overrightarrow{OP}=(1,\sqrt{2p})$，$\overrightarrow{OQ}=(1,-\sqrt{2p})$．

因为$OP\perp OQ$，所以$1-2p=0$，$2p=1$，即C的方程为$y^2=x$．

因为$\odot M$与l相切，所以$\odot M$的半径为1，$\odot M$的方程为$(x-2)^2+y^2=1$．

(2) **解法一：常规解法——利用韦达定理转化．**

设$A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，$A_3(x_3,y_3)$，且$y_1^2=x_1$，$y_2^2=x_2$，$y_3^2=x_3$．

当A_1，A_2，A_3中有两个点的横坐标为1或3时，直线A_2A_3均与$\odot M$相切．

当A_1，A_2，A_3任意两点的横坐标都不同时，设过A_1的切线方程为$x-x_1=m(y-y_1)$．

因为直线与$\odot M$相切，所以$\dfrac{|my_1+(2-x_1)|}{\sqrt{1+m^2}}=1$，两边平方并将$y_1^2=x_1$代入整理得：

$$(x_1-1)m^2+2y_1(2-x_1)m+(x_1^2-4x_1+3)=0.$$

设直线A_1A_2，A_1A_3分别对应m_1，m_2，则$\begin{cases} m_1+m_2=\dfrac{2y_1(x_1-2)}{x_1-1} \\ m_1m_2=x_1-3 \end{cases}$　①．

联立直线A_1A_2：$x-x_1=m_1(y-y_1)$与抛物线$y^2=x$，消x得：

$$y^2-m_1y+(m_1y_1-x_1)=0,$$

则 $y_1+y_2=m_1$，即 $y_2=m_1-y_1$ ②．同理：$y_3=m_2-y_1$ ③．

A_2A_3 点斜式方程为 $y-y_2=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$，将 $y_2^2=x_2$，$y_3^2=x_3$ 代入化简得

$$x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0.$$

点 $M(2,0)$ 到直线 A_2A_3 的距离 $d=\dfrac{|2+y_2y_3|}{\sqrt{1+(y_2+y_3)^2}}$，将①②③代入整理得

$$d=\frac{\left|2+\dfrac{3-x_1}{x_1-1}\right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{-2y_1}{x_1-1}\right)^2}}=\frac{\left|\dfrac{x_1+1}{x_1-1}\right|}{\left|\dfrac{x_1+1}{x_1-1}\right|}=1.$$

所以直线 A_2A_3 也与 $\odot M$ 相切．

解题反思：解决问题的关键是如何将 A_2A_3 的方程与另外两条直线与圆相切的条件结合．

解法一的思路是将 A_1 的坐标作为主元表示其余的量：首先知道直线 A_1A_2 和 A_1A_3 有交点 A_1，根据圆心到切线的距离等于半径，得到一个关于 m 的一元二次方程，进而通过韦达定理得到 m_1，m_2 与 x_1，y_1 的关系式．

接着将切线与抛物线联立，得到 A_2、A_3 纵坐标的表达式，在建立 A_2A_3 的方程后，利用韦达定理和 A_2、A_3 纵坐标的表达式整理得出圆心到直线的距离等于半径的结论．这个解法容易想到，但运算量大．

解法二：优化解法——利用同构简化计算

设 $A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，$A_3(x_3,y_3)$，且 $y_1^2=x_1$，$y_2^2=x_2$，$y_3^2=x_3$．

当 A_1，A_2，A_3 中有两个点的横坐标为 1 或 3 时，直线 A_2A_3 均与 $\odot M$ 相切．

当 A_1，A_2，A_3 任意两点的横坐标都不同时，A_1A_2 点斜式方程为 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，将 $y_1^2=x_1$，$y_2^2=x_2$ 代入化简得

$$x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0.$$

因为 A_1A_2 与 $\odot M$ 相切，所以 $\dfrac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1+(y_1+y_2)^2}}=1$，整理得

$$(x_1-1)x_2+2y_1y_2+3-x_1=0.$$

同理可得 $(x_1-1)x_3+2y_1y_3+3-x_1=0$．

因为 (x_2,y_2) 和 (x_3,y_3) 均为方程 $(x_1-1)x+2y_1y+3-x_1=0$ 的解，所以直线 A_2A_3 的方程为

$$(x_1-1)x+2y_1y+3-x_1=0.$$

设圆心 M 到直线 A_2A_3 的距离为 d，则有

$$d=\frac{|x_1+1|}{\sqrt{(x_1-1)^2+(2y_1)^2}}=\frac{|x_1+1|}{|x_1+1|}=1.$$

此时，直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 也相切．

综上，直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切．

解题反思：解法二也是将 A_1 的坐标作为主元表示其余的量．首先利用点 A_1，A_2 在抛物线上，确定直线 A_1A_2 的方程，再由 A_1A_2 与圆相切得出点 A_2 的横坐标与纵坐标的二元一次方程，同理得到关于 A_3 的横、纵坐标的二元一次方程，发现关于 (x_2,y_2) 的方程与关于 (x_3,y_3) 的方程结构特征相同，最终得到直线 A_2A_3 的方程．该法的简捷之处在于圆心 M 到 A_2A_3 的距离直接用 A_1 的横、纵坐标表示，无需借助第三个量转化．

解法二显示了数学的对称美，利用同构式简化了计算，对考生的代数运算能力要求高，体现了思维量的提升带来计算量的降低．

三、链接高考

为突显这类考题的有迹可循，提高复习效率，下面给出部分相关高考试题，以供参考．

1．(2021 年八省市高考适应性考试第 7 题)　已知抛物线 $y^2=2px$ 上三点 $A(2,2)$，B，C，直线 AB，AC 是圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的两条切线，则直线 BC 的方程为（　　）

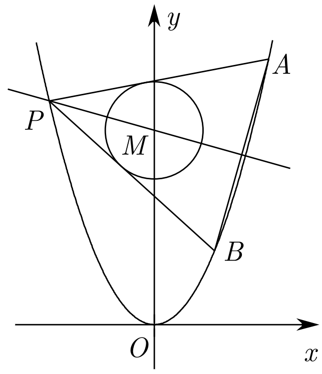
A．$x+2y+1=0$　　　　B．$3x+6y+4=0$

C．$2x+6y+3=0$　　　　D．$x+3y+2=0$

2．(2011 年浙江卷理第 21 题) 已知抛物线 C_1：$x^2=y$，圆 C_2：$x^2+(y-4)^2=1$ 的圆心为点 M．

(1) 求点 M 到抛物线 C_1 的准线的距离；

(2) 已知点 P 是抛物线 C_1 上一点（异于原点），过点 P 作圆 C_2 的两条切线，交抛物线 C_1 于 A，B 两点．若过 M，P 两点的直线垂直于 AB，求直线的方程．



四、结束语

高考试题是命题专家的用心之作，是考查基础知识、基本技能和基本思想方法的载体，具有典型性、示范性和权威性．高考题除具有测试和选拔功能外，还具有指导备考的教学功能．容易看出，今年考题的第二问与上述展示的高考题是同类题，这说明命题专家很重视命题的传承和借鉴．因此，充分挖掘高考试题的价值，既能引领我们的课堂教学，又可以提高复习的效率．