

从一个题出发谈“一题一课”教学设计

安宁市第一中学 李云芝 2023 年 10 月 4 日

（“一题多解”：不同知识、不同方法解决同一个题的教学。“多题一法”：不同知识背景下，相同数学解题方法的教学。不同知识背景下的数学方法的教学，更容易适合中等生，让数学学习“做减法”，更能体现知识、方法的“工具性”。）

1 例题（第二周周测 6）：过点 $p(1,0)$ 可以作曲线 $f(x) = xe^x$ 的两条切线，切点的横坐标分别为 m, n ，则 $m^2 + n^2 =$ _____

解析：设切点坐标为 (x, y) “利用 $k_{\text{切}} = f'(x_0)$ ， $k_{\text{切}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ”

$$(x+1)e^x = \frac{y}{x-1} = \frac{xe^x}{x-1} \text{ 得 } x^2 - x - 1 = 0 \text{ 的 } m+n=1, mn=-1$$

$$m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn = 3$$

初中知识：已知一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 两个实数根分别为 m, n 则

$$m^2 + n^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

解： $m+n=1, mn=-1$ $m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn = 3$ **不是难点。**

关键是建立出方程。（教学难点）

2 变式 1：（题设结论调换）过点 $p(t,0)$ 可以作曲线 $f(x) = xe^x$ 的两条切线，切点的横坐标分别为 m, n ，已知 $m^2 + n^2 = 3$ 则 $t =$ _____

解析： $(x+1)e^x = \frac{y}{x-t} = \frac{xe^x}{x-t}$ 得 $x^2 - tx - t = 0$ 的 $m+n=t, mn=-t$

$$m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn = t^2 + 2t = 3 \text{ 得 } \underline{t=1 \text{ 或 } t=-3}$$

缺 $x^2 - tx - t = 0$ 的 $\Delta = t^2 + 4t > 0$ 的 $t > 0$ 或 $t < -4$

所以 $\underline{t=1}$

析：这里的 m, n 设而不求

3 变式 2: (引入 θ 设而不求) 过点 $p(t,0)$ 可以作曲线 $f(x) = xe^x$ 的两条切线, 切点的横坐标分别为 $\sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta$, 则 $t =$ _____

解析: 同角三角函数的关系 $m = \sqrt{3} \cos \theta, n = \sqrt{3} \sin \theta$

$\sqrt{3} \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = t, 3 \cos \theta \sin \theta = -t$ 得 $t^2 + 2t - 3 = 0$ 解得 $t = 1$ 或 $t = -3$

$x^2 - tx - t = 0$ 的 $\Delta = t^2 + 4t > 0$ 得 $t > 0$ 或 $t < -4$ 所以 $t = 1$

4 变式 3: (第七周必测 8 题改编) 若过点 $P(-1, t)$ 可以作曲线

$f(x) = 2x^3 - 3x$ 的 2 条切线, 切点的横坐标分别为 m, n , 则 $t =$ _____

解析: 设切点为 (x_0, y_0) , 则 $f'(x_0) = 6x_0^2 - 3$,

切线方程为 $y - y_0 = (6x_0^2 - 3)(x - x_0)$,

整理可得, $y = 3(2x_0^2 - 1)x - 4x_0^3$.

又点 $P(-1, t)$ 在切线上, 则 $t = -3(2x_0^2 - 1) - 4x_0^3 = -4x_0^3 - 6x_0^2 + 3$.

要使过点 $P(-1, t)$ 存在 2 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 则该方程有 2 个解.

令 $g(x_0) = -4x_0^3 - 6x_0^2 + 3$, 则 $g'(x_0) = -12x_0^2 - 12x_0 = -12x_0(x_0 + 1)$.

解 $g'(x_0) > 0$, 可得 $-1 < x_0 < 0$, 所以 $g(x_0)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增;

解 $g'(x_0) < 0$, 可得 $x_0 < -1$ 或 $x_0 > 0$, 所以 $g(x_0)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

所以, $g(x_0)$ 在 $x_0 = -1$ 处取得极小值, 在 $x_0 = 0$ 处取得极大值.

又 $g(-1) = 1, g(0) = 3$, 由题意可知 $t = 1$ 或 3

5、(2023 年春高二期末昆明市统考)

已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1 (a, b \in \mathbf{R})$ 在 $x = 1$ 处取得极值 0.

(1) 求 a, b ; (2) 若过点 $(1, m)$ 存在三条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 求参数 m 的取值范围.

解析：(1) 略 (2) (2) 由 (1) 可知，函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ ，所以

$$f'(x) = 6x^2 - 6x,$$

设切点坐标为 $(x_0, 2x_0^3 - 3x_0^2 + 1)$ ，

所以切线方程为 $y - (2x_0^3 - 3x_0^2 + 1) = (6x_0^2 - 6x_0)(x - x_0)$ ，因为切线过点 $(1, m)$ ，

所以 $m - (2x_0^3 - 3x_0^2 + 1) = (6x_0^2 - 6x_0)(1 - x_0)$ ，即 $m = -4x_0^3 + 9x_0^2 - 6x_0 + 1$ ，

令 $h(x) = -4x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ ，则 $h'(x) = -12x^2 + 18x - 6 = -6(2x - 1)(x - 1)$ ，

令 $h'(x) = 0$ ，解得 $x = \frac{1}{2}$ ，或 $x = 1$ ，

当 x 变化时， $h'(x), h(x)$ 的变化情况如下表所示，

x	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	单调递减	$-\frac{1}{4}$	单调递增	0	单调递减

因此，当 $x = \frac{1}{2}$ 时， $h(x)$ 有极小值 $h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ ，

当 $x = 1$ 时， $h(x)$ 有极大值 $h(1) = 0$ ，

过点 $(1, m)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切，

等价于关于 x 的方程 $m = -4x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ 有三个不同的根，则 $-\frac{1}{4} < m < 0$ ，

所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

以上三题除了利用导数的几何意义建立方程关系，重要的考查了 $a+b$ 、 $a-b$ 、 ab 、 a^2+b^2 、 $\frac{b}{a}$ “知二可以转化”。

一、应用于同角三角函数中。（ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ）

4、多选 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ， $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 则下面说法正确的是（ ）

A. $\sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{5}$ B. θ 是第二象限角

B. C. $\tan \theta = \frac{1}{2}$ D. $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

5、（23 年全国乙卷文科）14. 若 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 则 $\sin \theta - \cos \theta =$ _____

二、应用解三角形中。（均值不等式、余弦定理、椭圆定义、双曲线定义）

6 例如：（典型例题，重要模型）、已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对边为 a, b, c ， $A = \frac{\pi}{3}$, $a = 2$ 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____，周长取值范围为 _____

解析：由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 得 $b^2 + c^2 - bc = 4$ 得 $b^2 + c^2 = bc + 4$

由基本不等式 $b^2 + c^2 \geq 2bc$ （当且仅当 $b = c$ 取等号） $bc \leq 4$

所以 $S_{\triangle} \leq \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3}$

因 为 $(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 3bc + 4 \leq 16$ 得

$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 3bc + 4 \leq 16$

所以 $2 < b+c \leq 4$ 所以三角形周长范围 $(4, 6]$

7 (高考题). $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为

$$a, b, c, \sin^2 B - \sin^2 C = \sin A (\sin A - \sin C).$$

(1) 求 B ;

(2) 设 BD 是 AC 边上的高, 且 $BD=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值

解析: (1) 由正弦定理得 $b^2 - c^2 = a(a - c)$, 即 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$,

$$\text{由余弦定理得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2},$$

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

$$(2) \text{ 由已知得 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \times 2 = \frac{1}{2} ac \sin \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } b = \frac{\sqrt{3}}{4} ac,$$

$$\text{由 (1) 知 } b^2 = a^2 + c^2 - ac,$$

$$\text{因此 } \frac{3}{16} a^2 c^2 = a^2 + c^2 - ac, \text{ 而 } a^2 + c^2 - ac \geq ac, \text{ 则 } \frac{3}{16} a^2 c^2 \geq ac,$$

$$\text{于是 } ac \geq \frac{16}{3}, \text{ 故 } S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} ac \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ 当且仅当 } a = c = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 时取等号,}$$

所以 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

8. (23 年全国 2 卷) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已

知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, D 为 BC 中点, 且 $AD=1$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, 求 $\tan B$;

(2) 若 $b^2 + c^2 = 8$, 求 b, c .

解析 (1) 略 (2) 方法 1: 在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得

$$\begin{cases} c^2 = \frac{1}{4} a^2 + 1 - 2 \times \frac{1}{2} a \times 1 \times \cos(\pi - \angle ADC) \\ b^2 = \frac{1}{4} a^2 + 1 - 2 \times \frac{1}{2} a \times 1 \times \cos \angle ADC \end{cases},$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{2} a^2 + 2 = b^2 + c^2, \text{ 而 } b^2 + c^2 = 8, \text{ 则 } a = 2\sqrt{3},$$

$$\text{又 } S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times \sin \angle ADC = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 解得 } \sin \angle ADC = 1,$$

$$\text{而 } 0 < \angle ADC < \pi, \text{ 于是 } \angle ADC = \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } b = c = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2.$$

方法2: 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 D 为 BC 中点, 则 $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 又 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$,
 于是 $4\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{CB}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = 2(b^2 + c^2) = 16$, 即 $4 + a^2 = 16$,
 解得 $a = 2\sqrt{3}$,

又 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times \sin \angle ADC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $\sin \angle ADC = 1$, 而 $0 < \angle ADC < \pi$, 于是
 $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$, 所以 $b = c = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2$.

9 (23 年全国 (甲卷理科) 12 题) 设 O 为坐标原点, F_1, F_2 为椭圆

$C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ 的两个焦点, 点 P 在 C 上, $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{3}{5}$, 则 $|OP| =$ ()

- A. $\frac{13}{5}$ B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$ C. $\frac{14}{5}$ D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

解析: 方法一: 设 $\angle F_1PF_2 = 2\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2} = b^2 \tan \theta$,

由 $\cos \angle F_1PF_2 = \cos 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{3}{5}$, 解得: $\tan \theta = \frac{1}{2}$,

由椭圆方程可知, $a^2 = 9, b^2 = 6, c^2 = a^2 - b^2 = 3$,

所以, $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times |F_1F_2| \times |y_p| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times |y_p| = 6 \times \frac{1}{2}$, 解得: $y_p^2 = 3$,

即 $x_p^2 = 9 \times \left(1 - \frac{3}{6}\right) = \frac{9}{2}$, 因此 $|OP| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = \sqrt{3 + \frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

故选: B.

方法二: 因为 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$ ①, $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|\cos \angle F_1PF_2 = |F_1F_2|^2$,

即 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - \frac{6}{5}|PF_1||PF_2| = 12$ ②, 联立①②,

解得: $|PF_1||PF_2| = \frac{15}{2}, |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 21$,

而 $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2})$, 所以 $|OP| = |\overrightarrow{PO}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}|$,

即 $|\overrightarrow{PO}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PF_1}|^2 + 2\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} + |\overrightarrow{PF_2}|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{21 + 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

故选: B.

方法三: 因为 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$ ①, $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|\cos \angle F_1PF_2 = |F_1F_2|^2$,

即 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - \frac{6}{5}|PF_1||PF_2| = 12$ ②, 联立①②, 解得: $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 21$,

由中线定理可知, $(2|OP|)^2 + |F_1F_2|^2 = 2(|PF_1|^2 + |PF_2|^2) = 42$, 易知 $|F_1F_2| = 2\sqrt{3}$,

解得： $|OP| = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

故选： B.

