# 《高考中二次型函数单调性讨论》教学设计

## 一、教材分析

高考中导数类的题目占据了极其重要位置，而对含参函数单调性讨论一直是考查热点。而利用导数分析含参函数的单调性，进而分析极值，最值，零点及趋势图像是解题的基础。高二选择性必修二教材的第五章给出了对具体函数单调性的求解范例，对含参函数单调性讨论的论述较少。而含参函数因加入了参数使得确定的函数变得不确定，对于含参函数的单调性求解一般要进行分类讨论，分类讨论的关键是要明确分类讨论的依据，做到分类准确恰当，不重不漏。所以讨论和研究含参函数单调性问题的求解是具有重大意义的。

## 二、学情分析

本节课是高三的一轮复习课，函数求导后有很多种形式，本节课选取了求导后是类二次型函数的含参单调性讨论。高三的学生虽然经过高一、高二的学习，虽然学生在学习一元二次不等式时，经常遇到含参问题，需要进行讨论，因此对含参问题并不陌生。但是对于含参的函数的单调性问题，何时需要分类讨论，以及如何分类讨论做到不重不漏并不清楚，也没有形成解题系统。本节课以题组的形式对高考中常见的二次函数型题型给予针对性讲解和训练，以期突破难点。

## 三、素养目标

本节课的教学设计将重点放在导数与函数单调性关系的发现上，如何将函数的单调性与导数进行联系，是本节课的难点．探究导数与函数单调性的关系对学生而言是一个挑战，以探究的方式去发现结论能激发他们的学习兴趣，体验导数解决问题的优越性．

本节课以“问题解决”贯穿始终，设计层层递进的问题链，通过构建函数单调性与导数的关系，让学生在教师的引导下自己发现问题、提出问题、分析问题和解决问题，发展数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算等数学核心素养．

## 四、教学重难点

重点：掌握含参的二次型函数单调性问题分析及解决能力

难点：培养利用分类讨论、化归、数形结合、类比等数学思想与方法进行解题的意识

## 五、课时安排：1 课时

## 六、教学策略：题组探究，学生动手，分类总结

## 七、教学设计：

### （一）核心素养下的高考导向

近五年高考考查函数单调性问题分布一览表

| | |
|---|---|
| 2021年 | 卷1　T22（1）；讨论函数的单调性 |
| 2020年 | 卷3 T20（1）讨论函数的单调性 |
| 2019年 | 卷2 T20（1）；卷3 T20（1）　讨论函数的单调性 |
| 2018年 | 卷1 T21（1）;卷3 T21（1）讨论函数的单调性 |
| 2017年 | 卷1 T21（1); 卷2 T21（1）卷3 T21（1）讨论函数的单调性 |

设计意图：通过近五年高考题目分析，让学生明晰考点

### （二）教材习题引入

**人教 2019 版《选择性必修二》P82 练习题 T2**

利用导数讨论二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的单调性区间.

设计意图：通过课本习题，让学生知道活水源头

$f'(x)=2ax+b$

令$f'(x)=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{2a}$

(1)当$a>0$时，$(-\infty,-\dfrac{b}{2a})\searrow,(-\dfrac{b}{2a},+\infty)\nearrow$

(2)当$a<0$时，$(-\infty,-\dfrac{b}{2a})\nearrow,(-\dfrac{b}{2a},+\infty)\searrow$

**（三）探究新知**

**类型 1：直接二次型转化**

( 2020年卷3 $T_{20}$(1) )

已知函数 $f(x)=x^3-kx+k^2$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

【解答】$f(x)=x^3-kx+k^2$． $f'(x)=3x^2-k$， $k\leqslant 0$ 时， $f'(x)\geqslant 0$， $f(x)$ 在 $R$ 递增，

$k>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得：$x>\sqrt{\dfrac{k}{3}}$ 或 $x<-\sqrt{\dfrac{k}{3}}$，令 $f'(x)<0$，解得：$-\sqrt{\dfrac{k}{3}}<x<\sqrt{\dfrac{k}{3}}$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{\dfrac{k}{3}})$ 递增，在 $(-\sqrt{\dfrac{k}{3}}$，$\sqrt{\dfrac{k}{3}})$ 递减，在 $(\sqrt{\dfrac{k}{3}}$，$+\infty)$ 递增，

综上，$k\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $R$ 递增，$k>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{\dfrac{k}{3}})$ 递增，在 $(-\sqrt{\dfrac{k}{3}}$，$\sqrt{\dfrac{k}{3}})$ 递减，在 $(\sqrt{\dfrac{k}{3}}$，$+\infty)$ 递增；

变式（1）：已知函数 $f(x)=kx^3-kx^2-x$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

思路：

①$f'(x)=3k^2x^2-2kx-1$(可因式分解）

$=(3kx+1)(kx-1)$

②令f′（x)=0(分k=0和$k\neq 0$）

③$k\neq 0$，$x_1=-\dfrac{1}{3k}$，$x_2=\dfrac{1}{k}$

变式（2）：已知函数 $f(x)=x^3-x^2-kx$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

思路：

①$f'(x)=3x^2-2x-k$

②令f′（x)=0（不可因式分解）

$\vartriangle=4+12k$（分$\leq 0$和>0）

③当$\vartriangle>0$，$x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12k}}{6}$

设计意图：通过上述过程引导学生回顾总结具体函数单调性求解的解题步骤，有助于学生思考比较含参函数在求解过程中所遇到的不确定性，明确为什么要进行分类讨论；含参函数相对于具体函数而言，不确定的因素可能存在于哪里？我们讨论的次序是怎

样的？此处预留空间让学生思考，讨论，激发学生的探究热情。即使学生回答得不全面也没有关系，教师后面可做补充，并概述要讨论的情况。

### 类型 2：“类”指数二次型转化

（人教2019版选择性必修•第二册 $P_{104}$. $T_{19(1)}$）

已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x\ (a\in R)$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

【解答】由 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$，求导 $f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^{x}-1$，$\because e^{2x}>0$，$e^{x}>0$

$\therefore$ 当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $R$ 上单调递减，

当 $a>0$ 时，$f'(x)=(2e^{x}+1)(ae^{x}-1)=2a(e^{x}+\dfrac{1}{2})(e^{x}-\dfrac{1}{a})$，令 $f'(x)=0$，解得：$x=ln\dfrac{1}{a}$，

当 $f'(x)>0$，解得：$x>ln\dfrac{1}{a}$，当 $f'(x)<0$，解得：$x<ln\dfrac{1}{a}$，$\therefore x\in(-\infty,ln\dfrac{1}{a})$ 时，$f(x)$ 单调递减，$x\in(ln\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$ 单调递增；

综上可知：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $R$ 单调减函数，

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,ln\dfrac{1}{a})$ 是减函数，在 $(ln\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$ 是增函数；

师生活动：学生思考,尝试完成以题目，投屏展示思考及解题过程，教师给予完善和评价。

设计意图：根据高考题的出题形式，对于复杂的函数可大致划分为两种类型，先设置导函数是非二次函数型的题组，通过导函数为二次型函数的简单类型为范例，使学生明确讨论的大致顺序。

### 类型 3：“类”对数二次型转化

例1( 2021年高考•全国甲卷 $T_{20}(1)$ )设函数 $f(x)=a^{2}x^{2}+ax-3\ln x+1$，其中 $a>0$.讨论 $f(x)$ 的单调性.

【解答】解：$f'(x)=2a^{2}x+a-\dfrac{3}{x}=\dfrac{2a^{2}x^{2}+ax-3}{x}=\dfrac{(2ax+3)(ax-1)}{x}$，$x>0$，

因为 $a>0$，所以 $-\dfrac{3}{2a}<0<\dfrac{1}{a}$，

所以在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在 $(\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

综上所述，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递增.

例2( 2018年卷1 $T_{21}(1)$ )已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

【解答】解：函数的定义域为$(0,+\infty)$，函数的导数$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$，设$g(x)=x^2-ax+1$，

当$a\leqslant 0$时，$g(x)>0$恒成立，即$f'(x)<0$恒成立，此时函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，当$a>0$时，判别式$\triangle=a^2-4$，

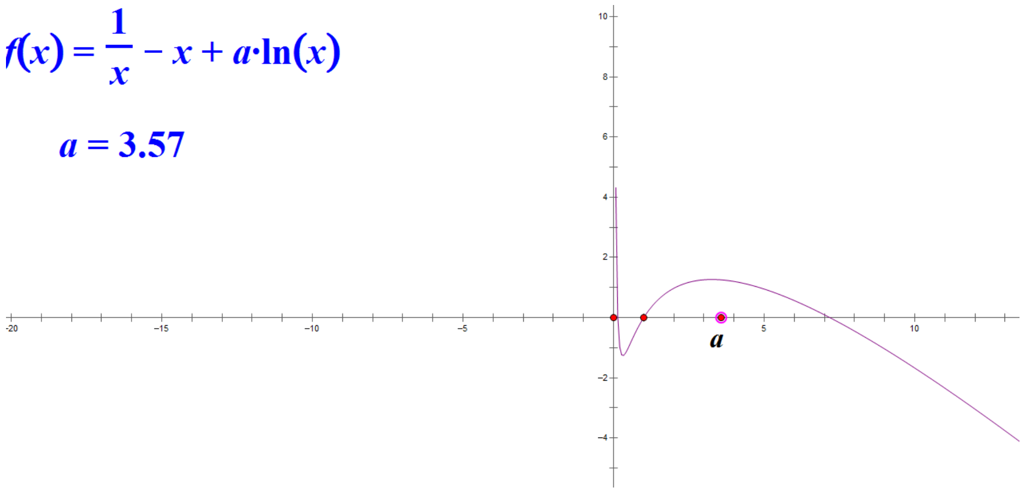
①当$0<a\leqslant 2$时，$\triangle\leqslant 0$，即$g(x)\geqslant 0$，即$f'(x)\leqslant 0$恒成立，此时函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，

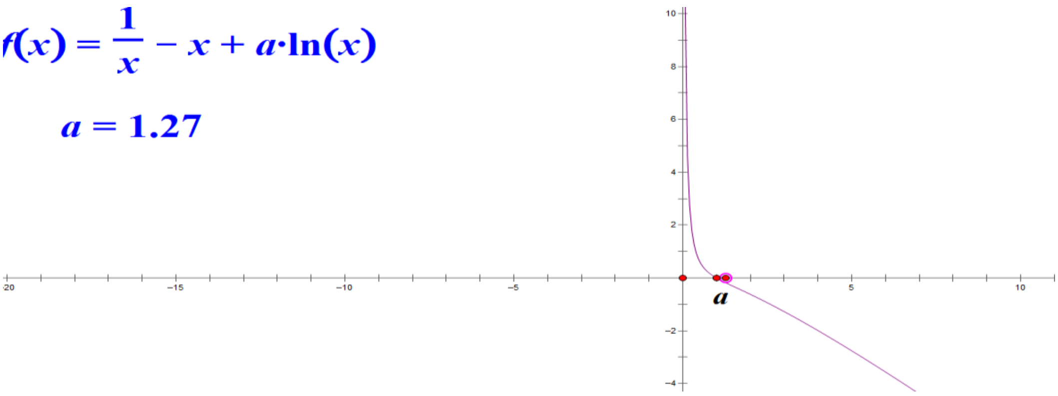
②当$a>2$时，$x$，$f'(x)$，$f(x)$的变化如下表：

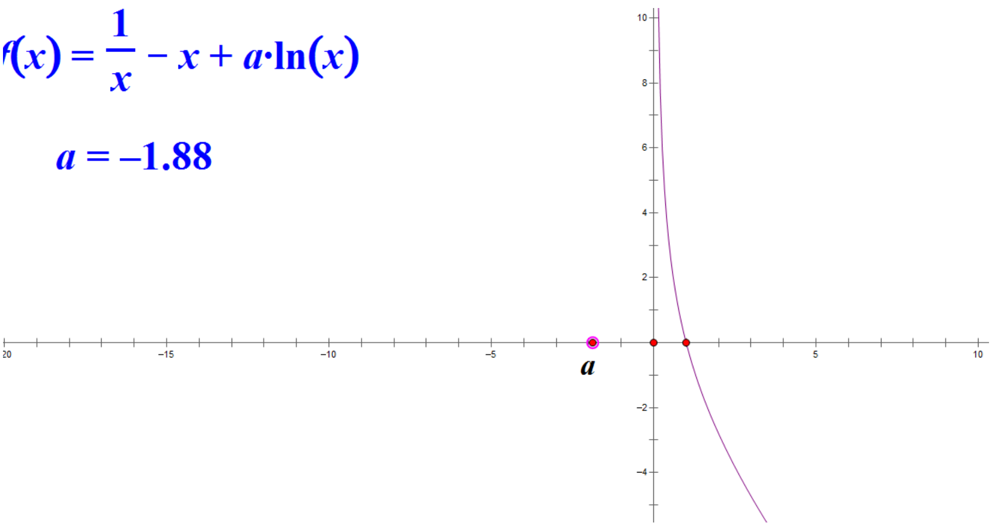
| $x$ | $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ | $\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ | $(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ | $\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ | $(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | 递减 | | 递增 | | 递减 |

综上当$a\leqslant 2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，当$a>2$时，在$(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$和$(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$上是减函数，则$(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$上是增函数

师生活动：学生分析讨论完毕，通过几何画板展示当 a 取不同值是函数图像的变化，让学生形象直观的理解题目。






设计意图：导函数是类二次函数型，难度比上一个类型上升了一个台阶。这个题组设计的例题由浅入深，分别代表参数在不同位置或不同的呈现形式。通过这三个不同类型的例题，旨在帮助学生梳理和总结出导函数为二次型的分类讨论的依据和层次。通过几何画板学生直观理解参数的改变对于函数单调性的影响。

### （四）本节小结

通过本节课的学习，说一说你的收获（学生总结，教师补充）

若二次型函数存在参数，则需对参数是否等于零进行讨论（如果二次函数的各项符号均相同，可直接判定），若二次项系数不为零或不含参时看二次式是否能分解因式，求出两根，若不能，则需对根的判别式进行讨论。最后求出 $f'(x)=0$ 的根后要注意讨论根与定义域的关系，定义域内若有多个根还要讨论根的大小及根左右两侧区间内导数的符号。

### （五）课后练习

## 课后小结：

**本节课的设计能达到教学目标，所设置的例题由浅入深，逐级提高难度，使不同层次学生都有所得，给学生充分动手时间，难度适中切合本班学生实际。从学生的掌握情况来看，取得较好的教学效果。不足的是教学时间太紧张，导致学生思考不够充分，总结归纳的时候学生参与面不够广。**